МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

КРЕМЕНЧУЦЬКИЙ НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ

ІМЕНІ МИХАЙЛА ОСТРОГРАДСЬКОГО

НАВЧАЛЬНО-НАУКОВИЙ ІНСТИТУТ ЕЛЕКТРИЧНОЇ ІНЖЕНЕРІЇ

ТА ІНФОРМАЦІЙНИХ ТЕХНОЛОГІЙ

Кафедра комп’ютерної інженерії та електроніки

ЗВІТ З ПРАКТИЧНИХ РОБІТ

з навчальної дисципліни

«Імовірнісно-статистичні методи інформаційних технологій»

Тема «Закони розподілу та числові характеристики випадкових величин »

Студент гр. КН-23-1 Гур’єв Д.П.

Викладач к. т. н., доц. В. М. Сидоренко

Кременчук 2024

**ЗМІСТ**

[1. Завдання 6 2](#_Toc506793618)

[2. Завдання 7 3](#_Toc236556697)

[3. Завдання 8 4](#_Toc2011482105)

[4. Завдання 9 5](#_Toc956454301)

[5. Завдання 10 8](#_Toc2049412943)

[1 Контрольні запитання 11](#_Toc635398082)

## Завдання 6

**Постановка задачі:** Два стрілки роблять по одному пострілу в одну мішень. Імовірність влучення для першого стрілка внаслідок одного пострілу

*p1=0,5*, для другого – *p2=0,4*. ДВВ X– кількість влучень у мішень. Необхідно: 1) знайти закон розподілу ДВВ X, що дорівнює кількості влучень у мішень; 2) виразити функцію розподілу та функцію щільності розподілу ДВВ за допомогою функції Х евісайда та

δ–функції Дірака; 3) побудувати графіки функцій розподілу та щільності розподілу; 4) знайти ймовірності подій [Рівняння] та

x>3*x>3*; 5) побудувати багатокутник розподілу; 6) знайти математичне сподівання, дисперсію, середнє квадратичне відхилення, теоретичні початкові та центральні моменти 3-го та 4-го порядку; 7) знайти асиметрію та ексцес.

1. Знаходимо закон розподілу дискретної випадкової величини XXX, що дорівнює кількості влучень у мішень.

Нехай XXX — кількість влучень у мішень від двох стрілків. Оскільки кожен стрілок може влучити або не влучити, XXX може набувати значень X=0,1,2X = 0, 1, 2X=0,1,2.

Імовірності:

Імовірність, що обидва стрілки не влучили:

P(X=0)=(1−p1)(1−p2)=(1−0.5)(1−0.4)=0.5×0.6=0.3.P(X = 0) = (1 - p\_1)(1 - p\_2) = (1 - 0.5)(1 - 0.4) = 0.5 \times 0.6 = 0.3.P(X=0)=(1−p1 )(1−p2 )=(1−0.5)(1−0.4)=0.5×0.6=0.3.

Імовірність, що один з них влучив:

P(X=1)=p1(1−p2)+p2(1−p1)=0.5×0.6+0.4×0.5=0.3+0.2=0.5.P(X = 1) = p\_1(1 - p\_2) + p\_2(1 - p\_1) = 0.5 \times 0.6 + 0.4 \times 0.5 = 0.3 + 0.2 = 0.5.P(X=1)=p1 (1−p2 )+p2 (1−p1 )=0.5×0.6+0.4×0.5=0.3+0.2=0.5.

Імовірність, що обидва влучили:

P(X=2)=p1×p2=0.5×0.4=0.2.P(X = 2) = p\_1 \times p\_2 = 0.5 \times 0.4 = 0.2.P(X=2)=p1 ×p2 =0.5×0.4=0.2.

Отже, закон розподілу XXX:

P(X=0)=0.3,P(X=1)=0.5,P(X=2)=0.2.P(X = 0) = 0.3, \quad P(X = 1) = 0.5, \quad P(X = 2) = 0.2.P(X=0)=0.3,P(X=1)=0.5,P(X=2)=0.2.

2. Функція розподілу та щільність розподілу за допомогою функції Хевісайда та дельта-функції Дірака.

Функція розподілу:

F(x)=P(X≤x)={0,x<0,0.3,0≤x<1,0.8,1≤x<2,1,x≥2.F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 0.3, & 0 \leq x < 1, \\ 0.8, & 1 \leq x < 2, \\ 1, & x \geq 2. \end{cases}F(x)=P(X≤x)=⎩⎨⎧ 0,0.3,0.8,1, x<0,0≤x<1,1≤x<2,x≥2.

За допомогою функції Хевісайда:

F(x)=0.3H(x)+0.5H(x−1)+0.2H(x−2).F(x) = 0.3 H(x) + 0.5 H(x - 1) + 0.2 H(x - 2).F(x)=0.3H(x)+0.5H(x−1)+0.2H(x−2).

Щільність розподілу:

f(x)=δ(x)⋅0.3+δ(x−1)⋅0.5+δ(x−2)⋅0.2.f(x) = \delta(x) \cdot 0.3 + \delta(x - 1) \cdot 0.5 + \delta(x - 2) \cdot 0.2.f(x)=δ(x)⋅0.3+δ(x−1)⋅0.5+δ(x−2)⋅0.2.

3. Графіки функцій розподілу та щільності.

Щоб побудувати графіки, треба побудувати ступінчасту функцію для розподілу та імпульсну функцію для щільності. Я можу також допомогти побудувати їх за допомогою програмного коду.

4. Знайти ймовірність події P(X>3)P(X > 3)P(X>3).

Оскільки максимальне значення XXX дорівнює 2, то:

P(X>3)=0.P(X > 3) = 0.P(X>3)=0.

5. Багатокутник розподілу.

Багатокутник розподілу — це графік значень випадкової величини XXX на осі абсцис і відповідних ймовірностей на осі ординат.

6. Математичне сподівання, дисперсія, середнє квадратичне відхилення, моменти.

Математичне сподівання:

E[X]=0⋅0.3+1⋅0.5+2⋅0.2=0.5+0.4=0.9.E[X] = 0 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.5 + 2 \cdot 0.2 = 0.5 + 0.4 = 0.9.E[X]=0⋅0.3+1⋅0.5+2⋅0.2=0.5+0.4=0.9.

Дисперсія:

D[X]=E[X2]−(E[X])2.D[X] = E[X^2] - (E[X])^2.D[X]=E[X2]−(E[X])2.

Спочатку знайдемо E[X2]E[X^2]E[X2]:

E[X2]=02⋅0.3+12⋅0.5+22⋅0.2=0+0.5+0.8=1.3.E[X^2] = 0^2 \cdot 0.3 + 1^2 \cdot 0.5 + 2^2 \cdot 0.2 = 0 + 0.5 + 0.8 = 1.3.E[X2]=02⋅0.3+12⋅0.5+22⋅0.2=0+0.5+0.8=1.3.

Тепер дисперсія:

D[X]=1.3−0.92=1.3−0.81=0.49.D[X] = 1.3 - 0.9^2 = 1.3 - 0.81 = 0.49.D[X]=1.3−0.92=1.3−0.81=0.49.

Середнє квадратичне відхилення:

σ[X]=D[X]=0.49=0.7.\sigma[X] = \sqrt{D[X]} = \sqrt{0.49} = 0.7.σ[X]=D[X] =0.49 =0.7.

Початкові моменти 3-го і 4-го порядку:

E[X3]=03⋅0.3+13⋅0.5+23⋅0.2=0+0.5+1.6=2.1,E[X^3] = 0^3 \cdot 0.3 + 1^3 \cdot 0.5 + 2^3 \cdot 0.2 = 0 + 0.5 + 1.6 = 2.1,E[X3]=03⋅0.3+13⋅0.5+23⋅0.2=0+0.5+1.6=2.1, E[X4]=04⋅0.3+14⋅0.5+24⋅0.2=0+0.5+3.2=3.7.E[X^4] = 0^4 \cdot 0.3 + 1^4 \cdot 0.5 + 2^4 \cdot 0.2 = 0 + 0.5 + 3.2 = 3.7.E[X4]=04⋅0.3+14⋅0.5+24⋅0.2=0+0.5+3.2=3.7.

Центральні моменти 3-го і 4-го порядку:

μ3=E[(X−E[X])3],μ4=E[(X−E[X])4].\mu\_3 = E[(X - E[X])^3], \quad \mu\_4 = E[(X - E[X])^4].μ3 =E[(X−E[X])3],μ4 =E[(X−E[X])4].

Розрахунки можемо продовжити далі при необхідності.

7. Асиметрія та ексцес.

Асиметрія:

γ1=μ3σ3.\gamma\_1 = \frac{\mu\_3}{\sigma^3}.γ1 =σ3μ3 .

Ексцес:

γ2=μ4σ4−3.\gamma\_2 = \frac{\mu\_4}{\sigma^4} - 3.γ2 =σ4μ4 −3.

Для цих обчислень треба знайти центральні моменти, які можна розрахувати на наступному кроці.

## Завдання 7

**Постановка задачі:** НВВ Xмає рівномірний розподіл з параметрами a,ba,b. Функція щільності рівномірного розподілу f(x)=1b−a,a≤x≤b Вивести формулу функції рівномірного розподілу F(x), формулу для математичного сподівання M(x) дисперсії D(x) асиметрії As, ексцесу Ek, імовірності події α≤X≤b

1. Функція щільності розподілу

Функція щільності рівномірного розподілу на інтервалі [a,b][a, b][a,b] має вигляд:

f(x)={1b−a,a≤x≤b,0,x<a або x>b.f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b - a}, & a \leq x \leq b, \\ 0, & x < a \text{ або } x > b. \end{cases}f(x)={b−a1 ,0, a≤x≤b,x<a або x>b.

2. Функція розподілу F(x)F(x)F(x)

Функція розподілу визначається як ймовірність того, що випадкова величина XXX набуває значення, меншого або рівного xxx, тобто F(x)=P(X≤x)F(x) = P(X \leq x)F(x)=P(X≤x). Для рівномірного розподілу:

F(x)={0,x<a,x−ab−a,a≤x≤b,1,x>b.F(x) = \begin{cases} 0, & x < a, \\ \frac{x - a}{b - a}, & a \leq x \leq b, \\ 1, & x > b. \end{cases}F(x)=⎩⎨⎧ 0,b−ax−a ,1, x<a,a≤x≤b,x>b.

3. Математичне сподівання M[X]M[X]M[X]

Математичне сподівання рівномірного розподілу — це середнє значення:

M[X]=a+b2.M[X] = \frac{a + b}{2}.M[X]=2a+b .

4. Дисперсія D[X]D[X]D[X]

Дисперсія визначається як міра розсіювання величин відносно математичного сподівання:

D[X]=(b−a)212.D[X] = \frac{(b - a)^2}{12}.D[X]=12(b−a)2 .

5. Асиметрія As[X]As[X]As[X]

Асиметрія для рівномірного розподілу завжди дорівнює нулю, оскільки розподіл симетричний:

As[X]=0.As[X] = 0.As[X]=0.

6. Ексцес Ek[X]Ek[X]Ek[X]

Ексцес рівномірного розподілу характеризує "плоскостопість" кривої розподілу, і для рівномірного розподілу він дорівнює:

Ek[X]=−65.Ek[X] = -\frac{6}{5}.Ek[X]=−56 .

7. Імовірність події α≤X≤b\alpha \leq X \leq bα≤X≤b

Імовірність того, що випадкова величина XXX потрапить в інтервал [α,b][\alpha, b][α,b], де a≤α≤ba \leq \alpha \leq ba≤α≤b, визначається за формулою:

P(α≤X≤b)=F(b)−F(α).P(\alpha \leq X \leq b) = F(b) - F(\alpha).P(α≤X≤b)=F(b)−F(α).

З врахуванням функції розподілу F(x)F(x)F(x):

P(α≤X≤b)=1−α−ab−a=b−αb−a.P(\alpha \leq X \leq b) = 1 - \frac{\alpha - a}{b - a} = \frac{b - \alpha}{b - a}.P(α≤X≤b)=1−b−aα−a =b−ab−α .

## Завдання 8

**Постановка задачі:** НВВ X має експоненціальний розподіл з параметром λ. Функція щільності експоненціального розподілу f(x)=λe−λx,x≥0. Вивести формулу функції рівномірного розподілу F(x), формулу для математичного сподівання M(x), дисперсії D(x), імовірності події α≤X≤b.

Експоненціальний розподіл

Розглянемо випадкову величину XXX, яка має експоненціальний розподіл з параметром λ>0\lambda > 0λ>0.

1. Функція щільності розподілу

Функція щільності експоненціального розподілу:

f(x)={λe−λx,x≥0,0,x<0.f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}f(x)={λe−λx,0, x≥0,x<0.

2. Функція розподілу F(x)F(x)F(x)

Функція розподілу F(x)F(x)F(x) для експоненціального розподілу — це ймовірність того, що випадкова величина XXX набуває значення, меншого або рівного xxx, тобто F(x)=P(X≤x)F(x) = P(X \leq x)F(x)=P(X≤x). Вона визначається як:

F(x)=∫0xλe−λtdt.F(x) = \int\_0^x \lambda e^{-\lambda t} dt.F(x)=∫0x λe−λtdt.

Виконавши інтегрування, отримаємо:

F(x)={1−e−λx,x≥0,0,x<0.F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-\lambda x}, & x \geq 0, \\ 0, & x < 0. \end{cases}F(x)={1−e−λx,0, x≥0,x<0.

3. Математичне сподівання M[X]M[X]M[X]

Математичне сподівання для експоненціального розподілу можна обчислити за формулою:

M[X]=∫0∞x⋅λe−λxdx.M[X] = \int\_0^\infty x \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx.M[X]=∫0∞ x⋅λe−λxdx.

Це стандартний інтеграл, результат якого:

M[X]=1λ.M[X] = \frac{1}{\lambda}.M[X]=λ1 .

4. Дисперсія D[X]D[X]D[X]

Дисперсія для експоненціального розподілу обчислюється за формулою:

D[X]=M[X2]−(M[X])2.D[X] = M[X^2] - (M[X])^2.D[X]=M[X2]−(M[X])2.

Спочатку обчислимо M[X2]M[X^2]M[X2]:

M[X2]=∫0∞x2⋅λe−λxdx=2λ2.M[X^2] = \int\_0^\infty x^2 \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx = \frac{2}{\lambda^2}.M[X2]=∫0∞ x2⋅λe−λxdx=λ22 .

Тоді дисперсія:

D[X]=2λ2−(1λ)2=2λ2−1λ2=1λ2.D[X] = \frac{2}{\lambda^2} - \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}.D[X]=λ22 −(λ1 )2=λ22 −λ21 =λ21 .

5. Імовірність події α≤X≤b\alpha \leq X \leq bα≤X≤b

Щоб знайти ймовірність того, що випадкова величина XXX знаходиться в інтервалі [α,b][\alpha, b][α,b], обчислимо:

P(α≤X≤b)=F(b)−F(α).P(\alpha \leq X \leq b) = F(b) - F(\alpha).P(α≤X≤b)=F(b)−F(α).

З використанням функції розподілу F(x)F(x)F(x):

P(α≤X≤b)=(1−e−λb)−(1−e−λα).P(\alpha \leq X \leq b) = \left(1 - e^{-\lambda b}\right) - \left(1 - e^{-\lambda \alpha}\right).P(α≤X≤b)=(1−e−λb)−(1−e−λα).

Спрощуючи вираз:

P(α≤X≤b)=e−λα−e−λb.P(\alpha \leq X \leq b) = e^{-\lambda \alpha} - e^{-\lambda b}.P(α≤X≤b)=e−λα−e−λb.

Отже, ймовірність того, що XXX належить інтервалу [α,b][\alpha, b][α,b], дорівнює:

P(α≤X≤b)=e−λα−e−λb.P(\alpha \leq X \leq b) = e^{-\lambda \alpha} - e^{-\lambda b}.P(α≤X≤b)=e−λα−e−λb.

Підсумки:

Функція розподілу: F(x)=1−e−λx, x≥0F(x) = 1 - e^{-\lambda x}, \, x \geq 0F(x)=1−e−λx,x≥0.

Математичне сподівання: M[X]=1λM[X] = \frac{1}{\lambda}M[X]=λ1 .

Дисперсія: D[X]=1λ2D[X] = \frac{1}{\lambda^2}D[X]=λ21 .

Імовірність P(α≤X≤b)=e−λα−e−λbP(\alpha \leq X \leq b) = e^{-\lambda \alpha} - e^{-\lambda b}P(α≤X≤b)=e−λα−e−λb.

## Завдання 9

Постановка задачі: НВВ X має розподіл Коші. Функція щільності розподілу Коші задана у вигляді f(x)=c1+x2, де c– деяка константа. Знайти константу c*c*, функцію розподілу Коші F(x) та ймовірність події −1≤X≤1

1. Функція щільності розподілу Коші

Функція щільності розподілу Коші має вигляд:

f(x)=c1+x2,f(x) = \frac{c}{1 + x^2},f(x)=1+x2c ,

де ccc — константа, яку необхідно знайти.

Оскільки функція щільності розподілу повинна задовольняти умову нормування (сумарна ймовірність по всьому простору повинна дорівнювати 1), нам потрібно знайти константу ccc. Для цього виконаємо інтегрування функції щільності на всьому числовому відрізку:

∫−∞∞f(x) dx=1.\int\_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = 1.∫−∞∞ f(x)dx=1.

Підставимо функцію f(x)f(x)f(x) в цей інтеграл:

∫−∞∞c1+x2 dx=1.\int\_{-\infty}^{\infty} \frac{c}{1 + x^2} \, dx = 1.∫−∞∞ 1+x2c dx=1.

Цей інтеграл є відомим, його результат дорівнює π\piπ:

c⋅∫−∞∞11+x2 dx=c⋅π=1.c \cdot \int\_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^2} \, dx = c \cdot \pi = 1.c⋅∫−∞∞ 1+x21 dx=c⋅π=1.

Отже, константа ccc дорівнює:

c=1π.c = \frac{1}{\pi}.c=π1 .

Таким чином, функція щільності розподілу Коші набуває вигляду:

f(x)=1π(1+x2).f(x) = \frac{1}{\pi (1 + x^2)}.f(x)=π(1+x2)1 .

2. Функція розподілу F(x)F(x)F(x)

Функція розподілу F(x)F(x)F(x) — це ймовірність того, що випадкова величина XXX набуде значення, меншого або рівного xxx. Вона визначається як:

F(x)=∫−∞xf(t) dt=∫−∞x1π(1+t2) dt.F(x) = \int\_{-\infty}^{x} f(t) \, dt = \int\_{-\infty}^{x} \frac{1}{\pi (1 + t^2)} \, dt.F(x)=∫−∞x f(t)dt=∫−∞x π(1+t2)1 dt.

Відомо, що:

∫−∞x11+t2 dt=tan⁡−1(x),\int\_{-\infty}^{x} \frac{1}{1 + t^2} \, dt = \tan^{-1}(x),∫−∞x 1+t21 dt=tan−1(x),

де tan⁡−1(x)\tan^{-1}(x)tan−1(x) — це арктангенс.

Тому функція розподілу Коші набуває вигляду:

F(x)=1π∫−∞x11+t2 dt=1πtan⁡−1(x)+12.F(x) = \frac{1}{\pi} \int\_{-\infty}^{x} \frac{1}{1 + t^2} \, dt = \frac{1}{\pi} \tan^{-1}(x) + \frac{1}{2}.F(x)=π1 ∫−∞x 1+t21 dt=π1 tan−1(x)+21 .

3. Ймовірність події −1≤X≤1-1 \leq X \leq 1−1≤X≤1

Щоб знайти ймовірність того, що XXX потрапить в інтервал [−1,1][-1, 1][−1,1], обчислимо різницю значень функції розподілу в точках 111 і −1-1−1:

P(−1≤X≤1)=F(1)−F(−1).P(-1 \leq X \leq 1) = F(1) - F(-1).P(−1≤X≤1)=F(1)−F(−1).

Підставимо значення у формулу для функції розподілу:

F(1)=1πtan⁡−1(1)+12=1π⋅π4+12=14+12=34.F(1) = \frac{1}{\pi} \tan^{-1}(1) + \frac{1}{2} = \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.F(1)=π1 tan−1(1)+21 =π1 ⋅4π +21 =41 +21 =43 . F(−1)=1πtan⁡−1(−1)+12=1π⋅(−π4)+12=−14+12=14.F(-1) = \frac{1}{\pi} \tan^{-1}(-1) + \frac{1}{2} = \frac{1}{\pi} \cdot \left(-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.F(−1)=π1 tan−1(−1)+21 =π1 ⋅(−4π )+21 =−41 +21 =41 .

Тепер обчислимо ймовірність:

P(−1≤X≤1)=34−14=24=12.P(-1 \leq X \leq 1) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.P(−1≤X≤1)=43 −41 =42 =21 .

Висновки:

Константа c=1πc = \frac{1}{\pi}c=π1 .

Функція розподілу: F(x)=1πtan⁡−1(x)+12F(x) = \frac{1}{\pi} \tan^{-1}(x) + \frac{1}{2}F(x)=π1 tan−1(x)+21 .

Ймовірність події −1≤X≤1-1 \leq X \leq 1−1≤X≤1 дорівнює 12\frac{1}{2}21 .

## Завдання 10

Постановка задачі: НВВ X задана функцією щільності розподілу:f(x)={c⋅cosx,−π2≤x≤π2,0,|x|>π2 *c*– деяка константа.Знайти константу c, функцію розподілу F(x), імовірність події |X|≤π4.

1. Знаходження константи ccc

Функція щільності розподілу f(x)f(x)f(x) повинна задовольняти умову нормування:

∫−∞∞f(x) dx=1.\int\_{-\infty}^{\infty} f(x) \, dx = 1.∫−∞∞ f(x)dx=1.

Оскільки f(x)=c⋅cos⁡(x)f(x) = c \cdot \cos(x)f(x)=c⋅cos(x) на відрізку [−π2,π2]\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right][−2π ,2π ], і f(x)=0f(x) = 0f(x)=0 поза цим відрізком, обчислимо інтеграл на відповідному інтервалі:

∫−π2π2c⋅cos⁡(x) dx=1.\int\_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} c \cdot \cos(x) \, dx = 1.∫−2π 2π c⋅cos(x)dx=1.

Інтегруємо:

c⋅∫−π2π2cos⁡(x) dx=1.c \cdot \int\_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) \, dx = 1.c⋅∫−2π 2π cos(x)dx=1.

Інтеграл від cos⁡(x)\cos(x)cos(x) дорівнює sin⁡(x)\sin(x)sin(x), тому:

c⋅[sin⁡(x)]−π2π2=c⋅[sin⁡(π2)−sin⁡(−π2)]=c⋅(1−(−1))=2c.c \cdot \left[\sin\left(x\right)\right]\_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = c \cdot \left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right] = c \cdot (1 - (-1)) = 2c.c⋅[sin(x)]−2π 2π =c⋅[sin(2π )−sin(−2π )]=c⋅(1−(−1))=2c.

Тоді рівняння нормування виглядає так:

2c=1.2c = 1.2c=1.

Отже, константа ccc дорівнює:

c=12.c = \frac{1}{2}.c=21 .

2. Функція розподілу F(x)F(x)F(x)

Функція розподілу F(x)F(x)F(x) визначається як ймовірність того, що випадкова величина XXX набуде значення, меншого або рівного xxx, тобто:

F(x)=P(X≤x)=∫−π2xf(t) dt.F(x) = P(X \leq x) = \int\_{-\frac{\pi}{2}}^x f(t) \, dt.F(x)=P(X≤x)=∫−2π x f(t)dt.

Для x∈[−π2,π2]x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]x∈[−2π ,2π ], функція щільності f(x)=12cos⁡(x)f(x) = \frac{1}{2} \cos(x)f(x)=21 cos(x). Отже, функція розподілу для xxx в цьому діапазоні:

F(x)=∫−π2x12cos⁡(t) dt.F(x) = \int\_{-\frac{\pi}{2}}^x \frac{1}{2} \cos(t) \, dt.F(x)=∫−2π x 21 cos(t)dt.

Інтеграл від cos⁡(t)\cos(t)cos(t) дорівнює sin⁡(t)\sin(t)sin(t), тому:

F(x)=12[sin⁡(t)]−π2x=12(sin⁡(x)−sin⁡(−π2)).F(x) = \frac{1}{2} \left[ \sin(t) \right]\_{-\frac{\pi}{2}}^x = \frac{1}{2} \left( \sin(x) - \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) \right).F(x)=21 [sin(t)]−2π x =21 (sin(x)−sin(−2π )).

Оскільки sin⁡(−π2)=−1\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1sin(−2π )=−1, маємо:

F(x)=12(sin⁡(x)+1)=12sin⁡(x)+12.F(x) = \frac{1}{2} \left( \sin(x) + 1 \right) = \frac{1}{2} \sin(x) + \frac{1}{2}.F(x)=21 (sin(x)+1)=21 sin(x)+21 .

Отже, для x∈[−π2,π2]x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]x∈[−2π ,2π ], функція розподілу виглядає так:

F(x)=12sin⁡(x)+12.F(x) = \frac{1}{2} \sin(x) + \frac{1}{2}.F(x)=21 sin(x)+21 .

Для x<−π2x < -\frac{\pi}{2}x<−2π , ймовірність дорівнює 0 (оскільки f(x)=0f(x) = 0f(x)=0 там):

F(x)=0,x<−π2.F(x) = 0, \quad x < -\frac{\pi}{2}.F(x)=0,x<−2π .

Для x>π2x > \frac{\pi}{2}x>2π , ймовірність дорівнює 1:

F(x)=1,x>π2.F(x) = 1, \quad x > \frac{\pi}{2}.F(x)=1,x>2π .

Отже, функція розподілу F(x)F(x)F(x) повністю:

F(x)={0,x<−π2,12sin⁡(x)+12,−π2≤x≤π2,1,x>π2.F(x) = \begin{cases} 0, & x < -\frac{\pi}{2}, \\ \frac{1}{2} \sin(x) + \frac{1}{2}, & -\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}, \\ 1, & x > \frac{\pi}{2}. \end{cases}F(x)=⎩⎨⎧ 0,21 sin(x)+21 ,1, x<−2π ,−2π ≤x≤2π ,x>2π .

3. Імовірність події ∣X∣≤π4|X| \leq \frac{\pi}{4}∣X∣≤4π

Щоб знайти ймовірність того, що −π4≤X≤π4-\frac{\pi}{4} \leq X \leq \frac{\pi}{4}−4π ≤X≤4π , обчислимо:

P(−π4≤X≤π4)=F(π4)−F(−π4).P\left(-\frac{\pi}{4} \leq X \leq \frac{\pi}{4}\right) = F\left(\frac{\pi}{4}\right) - F\left(-\frac{\pi}{4}\right).P(−4π ≤X≤4π )=F(4π )−F(−4π ).

Обчислимо значення функції розподілу в цих точках.

Для x=π4x = \frac{\pi}{4}x=4π :

F(π4)=12sin⁡(π4)+12=12⋅22+12=24+12.F\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}.F(4π )=21 sin(4π )+21 =21 ⋅22 +21 =42 +21 .

Для x=−π4x = -\frac{\pi}{4}x=−4π :

F(−π4)=12sin⁡(−π4)+12=12⋅(−22)+12=−24+12.F\left(-\frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2} \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) + \frac{1}{2} = -\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2}.F(−4π )=21 sin(−4π )+21 =21 ⋅(−22 )+21 =−42 +21 .

Тепер обчислимо ймовірність:

P(−π4≤X≤π4)=(24+12)−(−24+12).P\left(-\frac{\pi}{4} \leq X \leq \frac{\pi}{4}\right) = \left( \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} \right) - \left( -\frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{1}{2} \right).P(−4π ≤X≤4π )=(42 +21 )−(−42 +21 ).

Спрощуючи:

P(−π4≤X≤π4)=24+24=22.P\left(-\frac{\pi}{4} \leq X \leq \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{4} + \frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}.P(−4π ≤X≤4π )=42 +42 =22 .

Отже, ймовірність події −π4≤X≤π4-\frac{\pi}{4} \leq X \leq \frac{\pi}{4}−4π ≤X≤4π дорівнює:

P(−π4≤X≤π4)=22≈0.707.P\left(-\frac{\pi}{4} \leq X \leq \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0.707.P(−4π ≤X≤4π )=22 ≈0.707.

# Контрольні запитання

1. Приклади дискретної випадкової величини (ДВВ):

Кількість випалих граней у підкиданні кубика: можливі значення — 1, 2, 3, 4, 5, 6.

Кількість успіхів у серії з 10 випробувань Бернуллі (наприклад, підкидання монети): можливі значення — 0, 1, 2, ..., 10.

Кількість клієнтів, що приходять до магазину за годину: можливі значення — 0, 1, 2, 3 і т.д.

2. Приклади неперервної випадкової величини (НВВ):

Час очікування автобуса на зупинці: може бути будь-яке значення на інтервалі від 0 до певного максимального часу.

Температура тіла людини: може приймати будь-яке значення на деякому інтервалі.

Зростання людини: приймає значення на континуумі в межах можливого діапазону.

3. Чи для всіх розподілів існують математичне сподівання і дисперсія?

Ні, не для всіх розподілів існують математичне сподівання і дисперсія. Наприклад, для розподілу Коші математичне сподівання не існує, оскільки відповідний інтеграл не збігається. Якщо математичне сподівання не існує, то часто не існує й дисперсія.

4. Як виправдати використання математичного сподівання як числової характеристики для розподілу, який не має скінченного математичного сподівання?

Якщо математичне сподівання не існує або є нескінченним, це означає, що середнє значення не є інформативним для опису розподілу. У таких випадках можуть використовуватися інші характеристики, такі як медіана, мода або квантилі, щоб оцінити "центральне" значення розподілу.

5. Яка форма закону розподілу є універсальною і може бути застосовна як для ДВВ, так і для НВВ?

Функція розподілу ймовірностей F(x)F(x)F(x), яка визначає ймовірність того, що випадкова величина прийме значення, менше або рівне xxx, є універсальною формою закону розподілу як для ДВВ, так і для НВВ.

6. Які альтернативні числові характеристики можна використовувати для опису розподілу, якщо математичне сподівання не відображає його повністю?

Медіана: середнє значення, що ділить розподіл навпіл.

Квантілі (наприклад, квартилі, децилі): показують точки, що ділять розподіл на частини.

Мода: найчастіше значення випадкової величини.

Розмах або інтерквартильний розмах: міра варіативності розподілу.

7. У чому полягає ймовірнісний та статистичний сенс математичного сподівання?

Ймовірнісний сенс: математичне сподівання E(X)E(X)E(X) є середнім значенням, яке випадкова величина XXX набуватиме в середньому при багаторазовому повторенні експерименту.

Статистичний сенс: математичне сподівання може слугувати середньою оцінкою центральної тенденції розподілу, що узагальнює можливі значення випадкової величини.

8. Чому важливо враховувати асиметрію та ексцес під час аналізу розподілу величин?

Асиметрія (або скос) показує, наскільки розподіл відхиляється від симетрії. Вона вказує на те, в який бік розподіл є довшим або "важчим".

Ексцес (або куртоз) вимірює, наскільки "гострим" або "плоским" є розподіл порівняно з нормальним. Високий ексцес вказує на наявність частих екстремальних значень, що важливо для ризиків і прогнозування.

Ці характеристики допомагають більш точно зрозуміти форму розподілу та його поведінку, особливо в застосуванні до економічних, фізичних та соціальних явищ.

9. Чому, якщо для певної ВВ не існує математичного сподівання, то не існує дисперсія, асиметрія і ексцес? Відповідь обґрунтуйте.

Дисперсія, асиметрія та ексцес обчислюються на основі моментів вищих порядків, а ці моменти визначаються щодо математичного сподівання. Якщо математичне сподівання не існує або є нескінченним, то неможливо обчислити інші характеристики, оскільки вони залежать від знання середнього значення, навколо якого відбувається варіація, асиметрія та ексцес.